第49卷第5期　数 学 学 报 中 文 版　Vol.49, No.5
2006年9月　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1009-04　文献标识码: A

Smarandache 函数的值分布性质

徐哲峰

西北大学数学系 西安 710069
E-mail: zfxu@eyou.com

摘　要　对于给定的自然数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\,|\,m!\}$. 本文主要目的是利用初等方法研究 $S(n)$ 的值分布性质, 并给出了一些有趣的渐近公式.

关键词　Smarandache 函数; Smarandache 可乘函数; 渐近公式
MR(2000) 主题分类　11B83
中图分类　O156.4

On the Value Distribution of the Smarandache Function

Zhe Feng XU

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, P. R. China
E-mail: zfxu@eyou.com

Abstract　Given a positive integer n, the definition of the famous Smarandache function is: $S(n)=\min\{m: m\in N, n\,|\,m!\}$. The main purpose of this paper is to study the value distribution of the Smarandache function by using the elementary method, and give some interesting asymptotic formulae.

Keywords　Smarandache function; Smarandache-multiplicative function; asymptotic formula
MR(2000) Subject Classification　11B83
Chinese Library Classification　O156.4

1　引言及结论

对于给定的自然数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为

$$S(n)=\min\{m: m\in N, n\,|\,m!\}.$$

令 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则易知 $S(n)\geq p(n)$. Erdös [1] 指出, 对大多数 n, $S(n)=p(n)$. 这就意味着 $N(x)=o(x)$, 这里 $N(x)$ 表示满足 $n\leq x$ 和 $S(n)\neq p(n)$ 的自然数 n 的个数, $x>3$ 为实数. 从 $S(n)$ 的定义还可以得到如下的事实: 令 p 为素数, 则 $S(p)=p$; 如果 $n\neq 4$ 且 $n\neq p$, 则 $S(n)<n$. 由以上两个简单的性质, 可以得到 $S(n)$ 和 $\pi(x)$ 如下的一个关系式

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right],$$

收稿日期: 2005-04-04; 接受日期: 2005-05-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271093, 60472068)

其中 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数, $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数.

令 m 也是一个正整数, 如果一个算术函数 $f(n)$ 满足 $f(m\cdot n)=\max\{f(m),f(n)\}$, 这里 $(m,n)=1$, 我们便称 $f(n)$ 为 Smarandache 可乘函数. 显然, Smarandache 可乘函数不是可乘函数. 因为当 p,q 为两个不同的素数时, $f(p^\alpha q^\beta)\neq f(p^\alpha)f(q^\beta)$. 由定义容易看出 $S(n)$ 和 $p(n)$ 均为 Smarandache 可乘函数. 在文 [2] 中, Tabirca 证明了一个关于 Smarandache 可乘函数的有趣性质: 如果 $f(n)$ 是 Smarandache 可乘函数, 则 $g(n)=\min\{f(d):d\,|\,n,\,d\in N\}$ 也是 Smarandache 可乘函数. 设自然数 n 有标准素因数分解式 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 我们定义一个新的 Smarandache 可乘函数 $SM(n)$ 如下

$$SM(n)=\max\{SM(p_i^{\alpha_i}):i=1,2,\ldots,r\}$$

且

$$SM(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i,\quad i=1,2,\ldots,r.$$

事实上, $S(n)$, $SM(n)$ 和 $p(n)$ 之间有着非常密切的关系. 本文将用初等的方法研究 $S(n)$ 和 $SM(n)$ 的值分布性质以及这三个 Smarandache 可乘函数之间的关系, 并给出几个有趣的渐近公式, 即就是证明了如下的结论:

定理 1 对任意实数 $x\geq 3$, 我们有如下的渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数.

由定理 1 不难看出, Erdös 的断言不仅是正确的, 而且存在 $S(n)-p(n)$ 的一个有趣的均方值公式.

定理 2 对任意实数 $x\geq 3$, 我们有如下的渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(SM(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

从证明过程可以看出在绝大多数情况下 $S(n)$ 和 $SM(n)$ 相等.

2 几个引理

为了完成定理的证明, 需要几个引理:

引理 1 (i) 如果 $p(n)>\sqrt{n}$, 则 $S(n)=SM(n)=p(n)$;

(ii) 如果 $n=mp_1p(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)\leq\sqrt{n}$, 则 $S(n)=SM(n)=p(n)$.

(iii) 如果 $n=mp^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leq\sqrt{n}$, 则 $S(n)=SM(n)=2p(n)$.

证明 我们只证明有关 $S(n)$ 的结果, 关于 $SM(n)$ 的结果可以类似地证明.

(i) 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}p(n)$, 则 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}<\sqrt{n}<p(n)$, 那么 $p_i^{\alpha_i}\,|\,p(n)!$, $i=1,2,\ldots,r-1$, 所以 $n\,|\,(p(n))!$. 但是 $p(n)\dagger(p(n)-1)!$, 故 $S(n)=p(n)$.

(ii) 根据 $m<n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)$, 利用同样的方法我们可以证明 $S(n)=p(n)$.

(iii) 如果 $n=mp^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leq\sqrt{n}$, 那么 $m<p^2(n)$. 又因为 $p^2(n)\,|\,(2p(n))!$, 所以 $m\,|\,(2p(n))!$. 而 $p^2(n)\dagger(2p(n)-1)!$, 故 $S(n)=2p(n)$.

这样便证明了引理 1.

引理 2 对任意实数 $x\geq 3$, 有如下估计

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ p(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-p(n))^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\quad 和\quad \sum_{\substack{n\leq x\\ p(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}(SM(n)-p(n))^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

证明 令 $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$, 则有 $S(n)=\max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\le\max_{1\le i\le r}\{\alpha_i p_i\}$. 令 $\alpha p=\max_{1\le i\le r}\{\alpha_i p_i\}$, 则 $S(n)\ll p\ln n$. 注意到, 如果 $\alpha=1$, 那么 $p=p(n)$, 故 $S(n)-p(n)=0$, 有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ p(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-p(n))^2\ll\sum_{\substack{n\le x\\ p\le n^{\frac{1}{3}},\,p^2\mid n}}p^2\ln^2 n=\sum_{\substack{np^2\le x\\ p\le x^{\frac{1}{3}}}}p^2\ln^2 x$$
$$=\sum_{p\le x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\le\frac{x}{p^2}}\ln^2 x\ll\sum_{p\le x^{\frac{1}{3}}}x\ln^2 x\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

这样便证明了引理 2.

引理 3 令 p 为素数, m 为正整数且 $m\le x^{\frac{1}{3}}$, 则有渐近公式

$$\sum_{m\le p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right).$$

证明 令 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数的个数. 注意到 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$, 由 Abel 恒等式 (见文 [3]), 有

$$\sum_{m\le p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\frac{x}{m}-\pi(m)m^2-2\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\pi(t)tdt$$
$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}-\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)$$
$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right).$$

这样便证明了引理 3.

3 定理的证明

这节完成定理的证明. 首先证明定理 1. 从引理 1 (ii) 知: 如果 $p(n)>\sqrt{n}$, 则 $S(n)-p(n)=0$. 所以, 结合引理 1 和引理 2, 有

$$\sum_{n\le x}(S(n)-p(n))^2 \tag{1}$$
$$=\sum_{\substack{n\le x\\ p(n)>\sqrt{n}}}(S(n)-p(n))^2+\sum_{\substack{n\le x\\ p(n)\le\sqrt{n}}}(S(n)-p(n))^2 \tag{2}$$
$$=\sum_{\substack{n\le x\\ p(n)\le\sqrt{n}}}(S(n)-p(n))^2 \tag{3}$$
$$=\sum_{\substack{n\le x\\ p(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-p(n))^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<p(n)\le\sqrt{n}}}(S(n)-p(n))^2 \tag{4}$$
$$=\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<p(n)\le\sqrt{n}}}(S(n)-p(n))^2+O\big(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\big). \tag{5}$$

注意到, 当 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)\le\sqrt{n}$ 时, n 只有如下的几种情况:

(1) $n = mp^2(n)$;

(2) $n = mp_1p(n)$, 其中 $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < p(n)$;

(3) $n = mp(n)$, 且 $p(m) \le n^{\frac{1}{3}}$.

对于第 (3) 种情况, 如果 $S(n) = p(n)$, 则和式为零; 如果 $S(n) \ne p(n)$, 则必存在 $p^\alpha \mid m$, $\alpha \ge 2$ 且 $\alpha p > p(n)$, 那么必有 $p < n^{\frac{1}{3}}$. 故按照引理 2 的估计方法, 同样可以估计第 (3) 种情况下和式的阶不超过 $x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x$, 所以从引理 1 (iii), 有

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n^{\frac{1}{3}} < p(n) \le \sqrt{n}}} (S(n) - p(n))^2 \tag{6}$$

$$= \sum_{\substack{mp^2 \le x \\ (mp^2)^{\frac{1}{3}} < p \le \sqrt{mp^2}}} (S(mp^2) - p(mp^2))^2 \tag{7}$$

$$+ \sum_{\substack{mp_1p_2 \le x \\ (mp_1p_2)^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 \le \sqrt{mp_1p_2}}} (S(mp_1p_2) - p(mp_1p_2))^2 + O\big(x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x\big) \tag{8}$$

$$= \sum_{\substack{mp^2 \le x \\ (mp^2)^{\frac{1}{3}} < p \le \sqrt{mp^2}}} p^2 + O\big(x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x\big) \tag{9}$$

$$= \sum_{m \le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{m^2 < p^2 \le \frac{x}{m}} p^2 + O\big(x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x\big). \tag{10}$$

现在利用引理 3, 可以得到

$$\sum_{m \le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{m^2 < p^2 \le \frac{x}{m}} p^2 = \sum_{m \le x^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x - \ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{x}{m}}} \right) \right) \tag{11}$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} \sum_{m \le e^{\sqrt{\ln x}}} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} + O\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}} < m \le x^{\frac{1}{3}}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} \ln \frac{x}{m}} \right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right) \tag{12}$$

$$= \frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right). \tag{13}$$

结合 (5), (10) 以及 (13) 式, 便可以得到渐近公式

$$\sum_{n \le x} (S(n) - p(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right).$$

这样便完成了定理 1 的证明. 利用相同的方法还可以证明定理 2.

参 考 文 献

[1] Erdös P., Problem 6674, Amer. Math. Monthly, Vol. 98, 1991, 965.
[2] Tabirca S., About *S*-multiplicative functions, *Octogon*, 1999, **7**: 169–170.
[3] Apstol T. M., Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976, 77.